Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges

Richter, Egon

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977, S.237-242

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges

Von Egon Richter

Das Fundament jeder physikalischen Theorie sind Axiome. In der klassischen Mechanik war es bekanntlich Newton, dem es als erstem gelang, Axiome für die Bewegung von Massenpunkten zu formulieren. Spektakulär waren die Erfolge der Newtonschen Mechanik vor allem bei Systemen von Massenpunkten, die sich frei im Raum bewegen können. Dagegen erweisen sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen als unhandlich, wenn den Massenpunkten für ihre Bewegung nur ein begrenztes Raumgebiet zur Verfügung steht. In solchen Fällen ist es zweckmäßig, zunächst ein Axiom anzugeben, aus dem dann die besser geeigneten Bewegungsgleichungen hergeleitet werden können. Axiome, die auf diese Weise an die Spitze der Mechanik gestellt werden, nennt man Prinzipe. Gauß veröffentlichte 1829 eine Arbeit mit dem Titel „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik", in der ein solches Prinzip formuliert wird.

Um die Aussagen des Gaußschen Prinzips verstehen zu können, muß man sich in Erinnerung rufen, wie Beschränkungen der freien Bewegung von Massenpunkten durch Nebenbedingungen beschrieben werden können. Im folgenden betrachten wir ein System von n Massenpunkten, für das r verschiedene Nebenbedingungen existieren sollen. Solche Nebenbedingungen können entweder Verknüpfungen zwischen den Ortskoordinaten $x \equiv (x_1, \ldots, x_{3n})$ der Massenpunkte vorschreiben oder deren Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{x} \equiv (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n})$ betreffen. Zur Beschreibung der Verknüpfungen werden auf dem Orts- und Geschwindigkeitsraum definierte, hinreichend oft stetig differenzierbare reelle Funktionen benutzt. Die zuerst genannten Nebenbedingungen

$$(1) \qquad f_\varrho(x,t) = 0 \text{ bzw. } f_\varrho(x,t) \geq 0, \ \varrho = 1, \ldots, r$$

bezeichnet man als holonom, während Nebenbedingungen vom Typ

$$(2) \qquad f_\varrho(x,\dot{x},t) = 0 \text{ bzw. } f_\varrho(x,\dot{x},t) \geq 0, \ \varrho = 1, \ldots, r$$

nichtholonom genannt werden. Die Ungleichheitsbedingungen können auftreten, wenn die Massenpunkte nicht an Kurven oder Flächen gebunden sind, sondern innerhalb eines begrenzten Raumgebietes frei beweglich sind. Im Fall nichtholonomer Nebenbedingungen genügt es für die meisten Probleme, statt (2) die in $\dot{x}$ linearen Funktionen

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{3n} \gamma_{i\varrho}(x,t)\,\dot{x}_i + \gamma_\varrho(x,t) = 0, \ \varrho = 1, \ldots, r$$

zu verwenden. Typische Beispiele für das Auftreten dieser Nebenbedingungen sind Räder, die ohne zu gleiten auf einer Fläche rollen und Schneiden, die auf einer Fläche gleiten, ohne zu kratzen. Bei geführten Massenpunkten können auch nichtlineare Nebenbedingungen auftreten, die in (2) enthalten sind.

Für die Behandlung von Bewegungen mit Nebenbedingungen ist es oft nützlich, neue geeignete Koordinaten einzuführen und zwar so viele, wie das System Freiheitsgrade hat. Diese sog. generalisierten Koordinaten unterliegen dann keinen Nebenbedingungen mehr. Bei holonomen Gleichheitsbedingungen ist die Einführung holonomer Koordinaten durch die umkehrbar eindeutige Transformation

$$(4) \qquad q_\nu(x_1,..,x_{3n},t), \ \nu = 1,..,3n\text{-}r$$

angemessen, während nichtholonome Nebenbedingungen (3) durch nichtholonome Koordinaten

$$(5) \qquad \dot{\xi}_\nu = \sum_{i=1}^{3n} \alpha_{\nu i}(x,t)\,\dot{x}_i + \alpha_\nu(x,t), \ \nu = 1,\ldots 3n\text{-}r$$

berücksichtigt werden können. Wenn (5) umkehrbar ist, folgt

$$(6) \qquad \dot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{3n-r} \beta_{i\nu}(x,t)\,\dot{\xi}_\nu + \beta_i(x,t), \ i = 1,..,3n.$$

In der Mechanik benutzt man zur Herleitung von Bewegungsgleichungen für ein System von Massenpunkten mit Nebenbedingungen am häufigsten das als d'Alembertsches Prinzip bezeichnete Axiom

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{3n} \left[m_i\ddot{x}_i - F_i(x,\dot{x},t)\right] \delta x_i \geq 0,$$

wobei das Zeichen > nur für Nebenbedingungen gilt, die durch Ungleichheitsbedingungen beschrieben werden. Wir verwenden die durchnumerierte Schreibweise, d.h. dem k-ten Massenpunkt mit der Masse m_k ist die Beschleunigung $\underline{\ddot{x}}_k \equiv (\ddot{x}_{3k-2}, \ddot{x}_{3k-1}, \ddot{x}_{3k})$ und die Kraft $\underline{F}_k \equiv (F_{3k-2}, F_{3k-1}, F_{3k})$ zugeordnet. Mit $\delta x_1,.., \delta x_{3n}$ werden kleine Verschiebungen der Massenpunkte bezeichnet, die mit den Nebenbedingungen verträglich sein sollen, aber ohne Berücksichtigung der Zeit ausgeführt werden – virtuelle Verrückungen genannt. Die virtuellen Verrückungen der Massenpunkte für verschiedene Zeiten müssen keineswegs miteinander zusammenhängen. Wählt man aber speziell stetige und hinreichend oft differenzierbare Funktionen der Zeit $\delta x_i(t)$, $i = 1, \ldots, 3n$, so wird jeder Bahnkurve $\underline{x}_k(t)$, $k = 1,..,n$, durch $\underline{x}_k(t) + \delta\underline{x}_k(t)$, $k = 1,..,n$, eine benachbarte glatte Kurve zugeordnet und man findet

$$(8) \qquad \frac{d}{dt}\delta\underline{x}_k = d\underline{\dot{x}}_k, \ \frac{d}{dt}d\underline{\dot{x}}_k = \delta\underline{\ddot{x}}_k, \ \underline{k} = 1,..,n.$$

Anstelle des d'Alembertschen Prinzips kann man zur Herleitung von Bewegungsgleichungen auch andere Axiome verwenden, z.B. das als Gaußsches Prinzip bezeichnete Axiom

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{3n} \left[m_i\ddot{x}_i - F_i(x,\dot{x},t)\right] \delta_G\ddot{x}_i \geq 0,$$

das in dieser Schreibweise allerdings nicht von Gauß, sondern von J.W. Gibbs 1879 formuliert wurde. Das Zeichen > gilt wie in (7) nur für Ungleichheitsbedingungen.

Für die virtuellen Beschleunigungen $\delta_G \ddot{x}_i$, $i = 1,..,3n$, wird definiert, daß nicht (8) gilt, sondern

$$\delta_G x_i = 0, \quad \delta_G \dot{x}_i = 0, \quad i = 1,\ldots,3n, \tag{10}$$

Gaußsche Variation genannt.

Im d'Alembertschen Prinzip werden verschiedene Lagen bzw. Bahnen der Massenpunkte betrachtet. Im Gegensatz dazu gehen ins Gaußsche Prinzip nur die mit den Nebenbedingungen verträglichen Beschleunigungen ein. Damit entspricht das Gaußsche Prinzip genau der Newtonschen Vorstellung, wonach nur die Beschleunigungen der Massenpunkte direkt von ihrer Umgebung beeinflußt werden können.

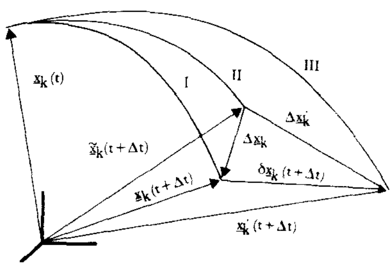
Alle virtuellen Verrückungen müssen mit den Nebenbedingungen verträglich sein. Für das d'Alembertsche Prinzip ergeben sich die entsprechenden Beziehungen unmittelbar aus (1) bzw. (3). Allerdings versagt dieses Prinzip für nichtlineare nichtholonome Nebenbedingungen. Beim Gaußschen Prinzip erhält man analoge Beziehungen für die virtuellen Beschleunigungen $\delta_G \ddot{x}_i$, $i = 1,..,3n$ erst nach einmaligem zeitlichen Ableiten der nichtholonomen bzw. zweimaligem Ableiten der holonomen Nebenbedingungen. Die Gleichtheitsbedingungen gehen dann über in die Form

$$\sum_{i=1}^{3n} \eta_{i\varrho}(x,\dot{x},t)\,\ddot{x}_i + \eta_\varrho(x,\dot{x},t) = 0, \quad \varrho = 1,..,r \tag{11}$$

und es folgt

$$\sum_{i=1}^{3n} \eta_{i\varrho}(x,\dot{x},t)\,\delta_G \ddot{x}_i = 0, \quad \varrho = 1,..,r. \tag{12}$$

Für die Herleitung von Bewegungsgleichungen aus dem Gaußschen Prinzip ist es nützlich, den Gedanken zu folgen, die Gauß 1829 veröffentlicht hat. Dazu betrachten wir den k-ten Massenpunkt, der sich zur Zeit t am Ort $\underline{x}_k$ befindet und die Geschwindigkeit $\dot{\underline{x}}_k$ besitzt. Längs der wirklichen Bahnkurve I (vgl. Abb.) erreicht der Massenpunkt zur Zeit $t+\Delta t$ den Ort $\underline{x}_k(t+\Delta t)$. Wenn derselbe Massenpunkt zwar dem Einfluß äußerer Kräfte, aber keinen Nebenbedingungen unterliegen würde, hätte er längs einer anderen Kurve, die mit II bezeichnet wird, zur Zeit $t+\Delta t$ den Ort $\tilde{\underline{x}}_k(t+\Delta t)$ erreicht. Die Kurve III ergibt sich aus der Kurve I, wenn die Beschleunigung des Massenpunktes zur Zeit t virtuell verändert wird. Der



Kurvenpunkt $\underline{x}_k'(t+\Delta t)$ soll mit den Nebenbedingungen zur Zeit $t+\Delta t$ verträglich sein. Durch Taylorentwicklungen um den gemeinsamen Punkt $\underline{x}_k$ ergibt sich wegen $\dot{\underline{x}}_k(t) = \dot{\tilde{\underline{x}}}_k(t) = \dot{\underline{x}}_k'(t)$

(13) $$\Delta\underline{x}_k \equiv \underline{x}_k(t+\Delta t) - \tilde{\underline{x}}_k(t+\Delta t) = \frac{1}{2}\left[\ddot{\underline{x}}_k(t) - \frac{1}{m_k}\,\underline{F}_k(t)\right](\Delta t)^2,$$

(14) $$\Delta\underline{x}_k' \equiv \underline{x}_k'(t+\Delta t) - \tilde{\underline{x}}_k(t+\Delta t) = \frac{1}{2}\left[\ddot{\underline{x}}_k(t) + \delta_G\ddot{\underline{x}}_k(t) - \frac{1}{m_k}\,\underline{F}_k(t)\right](\Delta t)^2.$$

Für die virtuelle Verrückung zur Zeit $t+\Delta t$ erhält man

(15) $$\delta\underline{x}_k(t+\Delta t) \equiv \underline{x}_k'(t+\Delta t) - \underline{x}_k(t+\Delta t) = \frac{1}{2}\,\delta_G\ddot{\underline{x}}_k(t)\,(\Delta t)^2.$$

Die Terme dritter und höherer Ordnung in Δt wurden vernachlässigt. Gegenüber der Bahn II des freien Massenpunktes erzwingen die Nebenbedingungen eine Bahnabweichung, die offenbar durch $\Delta\underline{x}_k$ gegeben ist. In der bereits erwähnten Arbeit führt Gauß $m_k(\Delta\underline{x}_k)^2$ als Maß für diesen Zwang der Nebenbedingungen ein. Man bezeichnet deshalb

(16) $$Z = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i}(m_i\ddot{x}_i - F_i)^2 = \frac{4}{(\Delta t)^4}\sum_{k=1}^{n} m_k(\Delta\underline{x}_k)^2$$

als Zwang. Mit den Nebenbedingungen verträglich ist der Zwang

(17) $$Z' = \frac{4}{(\Delta t)^4}\sum_{k=1}^{n} m_k(\Delta\underline{x}_k')^2 =$$
$$= Z + 2\sum_{i=1}^{3n}(m_i\ddot{x}_i - F_i)\,\delta_G\ddot{x}_i + \sum_{i=1}^{3n} m_i(\delta_G\ddot{x}_i)^2.$$

Wegen (9) ergibt sich hieraus für $\delta_G\ddot{x}_i \neq 0$

(18) $$Z' > Z,$$

d. h. der Zwang ist für die wirkliche Bahn am kleinsten. Diesen Sachverhalt beschreibt Gauß mit den Worten: Die Bewegung eines Systems von Massenpunkten „geschieht in jedem Augenblick in möglich größter Übereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange". Gauß hat versucht, dieses Prinzip des kleinsten Zwanges mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips zu beweisen. Tatsächlich ist das Gaußsche Prinzip aber allgemeiner als das d'Alembertsche, wie J. W. Gibbs 1879 und P. Stäckel 1919 anhand von Beispielen zeigen konnten.

Aus der Formulierung des Gaußschen Prinzips als ein Prinzip des kleinsten Zwanges folgt: Für ein System von Massenpunkten existiert eine Funktion $Z(\ddot{x})$. Berechnet man das Minimum dieser Funktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen, so ergeben sich die wirklich auftretenden Beschleunigungen des Systems. Die Verwandtschaft mit der Methode der kleinsten Quadrate ist unverkennbar. Das Gaußsche Prinzip ist also im Gegensatz zum d'Alembertschen ein Minimalprinzip. Diese Eigenschaft des Gaußschen Prinzips ist sehr angenehm, wenn man untersuchen will, ob die Bewegung des Systems durch das Prinzip eindeutig bestimmt wird. Es genügt nämlich festzustellen, unter welchen Voraussetzungen Z nur für einen einzigen Satz von Werten $\ddot{x}_1, \ldots, \ddot{x}_{3n}$ ein Minimum hat. Dieses Eindeutigkeitsproblem wurde bereits in der noch von Gauß betreuten Dissertation von A. Ritter 1853 behandelt. In allgemeinster Fassung formulierte P. Stäckel 1919 die benötigten Voraussetzungen.

Die Berechnung des Minimums von Z ist ein einfaches Problem der Differentialrechnung. Die Nebenbedingungen (11) berücksichtigt man üblicherweise mit Hilfe von Lagrangeschen Multiplikatoren $\lambda_\varrho(x,\dot{x},t)$, $\varrho = 1,..,r$. Notwendig für das Minimum ist dann

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_j}\left[Z - \sum_{\varrho=1}^{r} 2\lambda_\varrho \left(\sum_{i=1}^{3n} \eta_{i\varrho}\ddot{x}_i + \eta_\varrho\right)\right] = 0,\ j = 1,..,3n \tag{19}$$

und die gesuchten Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_j\ddot{x}_j = F_j(x,\dot{x},t) + \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho(x,\dot{x},t)\,\eta_{j\varrho}(x,\dot{x},t),\ j = 1,..,3n. \tag{20}$$

Aus der Herleitung dieser Gleichungen ergibt sich ihre Gültigkeit auch für Probleme mit nichtlinearen nichtholonomen Nebenbedingungen. Die Berücksichtigung von Nebenbedingungen vom Typ $f_\varrho(x,\dot{x},t) = 0$ erlaubt es z. B., Konstanten der Bewegung als Nebenbedingungen zu verwenden. J. Baumgarte hat 1972 gezeigt, daß diese Möglichkeit bei der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen freier Massenprodukte nützlich sein kann.

Das Extremwertproblem für Z kann auch ohne Einführung Lagrangescher Multiplikatoren gelöst werden. Dazu benutzt man die bereits erwähnten generalisierten Koordinaten. Wir betrachten den Fall, daß r nichtholonome Nebenbedingungen gegeben sind und führen nichtholonome Koordinaten $\xi_1,..,\xi_{3n-r}$ nach (5) ein. Wenn (6) existiert, gilt:

$$\ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{3n-r} \beta_{i\nu}(x,t)\,\ddot{\xi}_\nu + \Phi_i(x,\dot{\xi},t),\ i = 1,..,3n. \tag{21}$$

Der Zwang $Z(x,\dot{x},\ddot{x},t)$ wird durch (6) und (21) in eine Funktion $\tilde{Z}(x,\dot{\xi},\ddot{\xi},t)$ transformiert, in der die Variablen $\ddot{\xi}_1,..,\ddot{\xi}_{3n-r}$ voneinander unabhängig sind. Die (19) entsprechende Extremwertbedingung lautet deshalb

$$\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \ddot{\xi}_\mu} = 0,\ \ \mu = 1,\ldots,3n\text{-}r. \tag{22}$$

Ein typisches Beispiel nichtholonomer Koordinaten sind die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Bekanntlich benutzt man diese Größen z. B. zur Beschreibung der Drehung eines starren Körpers, der in einem Punkt festgehalten wird. In diesem Fall besitzt jeder Massenpunkt die Geschwindigkeit

$$\underline{\dot{x}}_k = \underline{\omega} \times \underline{x}_k,\ \ k = 1,..,n, \tag{23}$$

so daß eine Transformation der Form (6) mit 3n-r=3 existiert. Man kann dann $\tilde{Z}(x,\underline{\omega},\underline{\dot{\omega}},t)$ berechnen und erhält durch (22) direkt die Eulerschen Kreiselgleichungen.

Im Gaußschen Prinzip werden ebenso wie im d'Alembertschen Variationen benutzt, die sich auf den Zustand des Systems zu einer bestimmten Zeit beziehen. Bekanntlich kann man aber das d'Alembertsche Prinzip für Gleichgewichtsbedingungen auch zur Herleitung der integralen Bedingung

$$\int_{t_a}^{t_b} (\delta T + \delta A)\, dt = 0 \tag{24}$$

benutzen, wobei $\delta x_i(t_a) = \delta x_i(t_b) = 0$, $i = 1,..,3n$ gewählt wird und

$$T = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2; \quad \delta A = \sum_{i=1}^{3n} F_i \delta x_i \tag{25}$$

die kinetische Energie bzw. die virtuelle Arbeit bezeichnet. In der Lagrangeschen Mechanik wird (24) dann als Integralprinzip axiomatisch verwendet.

Auch das Gaußsche Prinzip ermöglicht den Übergang zu einer integralen Bedingung. Allerdings muß man dazu zeitabhängige Verrückungen verwenden, wie E. Schenkl 1913 bemerkte. Solche Verrückungen wurden von O. Hölder 1896 und A. Voss 1900 dadurch eingeführt, daß Raumzeitpunkten x_i, t; $i = 1,\ldots,3n$ der wahren Bahnen die Raumzeitpunkte $x_i' = x_i + \not\delta x_i$, $t' = t + \not\delta t$; $i = 1,..,3n$ zugeordnet werden. Wählt man die Verrückungen $\not\delta x_i$, $\not\delta t$; $i = 1,..,3n$ als stetige und genügend oft differenzierbare Funktionen der Zeit t, so bildet die Gesamtheit der variierten Punkte zu den Bahnkurven benachbarte, glatte Kurven:

$$\underline{x}_k'(t') = \underline{x}_k(t) + \not\delta \underline{x}_k(t), \; t' = t + \not\delta t(t); \; k = 1,..,n. \tag{26}$$

Zwischen diesen Verrückungen und den bislang verwendeten Verrückungen mit konstant gehaltener Zeit bestehen die Beziehungen

$$\not\delta \underline{x}_k = \delta \underline{x}_k + \dot{\underline{x}}_k \not\delta t, \; \not\delta \dot{\underline{x}}_k = \delta \dot{\underline{x}}_k + \ddot{\underline{x}}_k \not\delta t, \text{ usw.}, \; k = 1,..,n. \tag{27}$$

Für die Gaußsche Variation (10) folgt

$$\not\delta_G \underline{x}_k = \dot{\underline{x}}_k \not\delta t, \; \not\delta_G \dot{\underline{x}}_k = \ddot{\underline{x}}_k \not\delta t, \; \not\delta_G \ddot{\underline{x}}_k = \delta_G \ddot{\underline{x}}_k + \dddot{\underline{x}}_k \not\delta t, \; k = 1,..,n, \tag{28}$$

d.h. jedem wirklichen Bahnpunkt wird umkehrbar eindeutig ein Punkt einer benachbarten Kurve zugeordnet. Dadurch wird es möglich, die Gaußsche Variation auch in der Variationsrechnung zu verwenden. Für das Funktional

$$J[x] = \int_{t_a}^{t_b} f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, t)\, dt, \tag{29}$$

in dem f eine hinreichend oft differenzierbare Funktion sei, erhält man wegen (26) und (28) als erste Gaußsche Variation

$$\delta_G J = \int_{t_a}^{t_b} \sum_{j=1}^{3n} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dddot{x}_j}\right) \delta_G \ddot{x}_j\, dt, \tag{30}$$

wenn $\delta_G \ddot{x}_j(t_a) = \delta_G \ddot{x}_j(t_b) = 0$, $j = 1,..,3n$ und $\not\delta t(t_a) = \not\delta t(t_b) = 0$ gewählt wird. Die für einen Extremwert notwendige Bedingung $\delta_G J = 0$ liefert ohne Nebenbedingungen die Eulerschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dddot{x}_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}_j} = 0, \; j = 1,..,3n. \tag{31}$$

Für die Herleitung einer zu (24) analogen integralen Bedingung aus dem Gaußschen Prinzip hat man zunächst

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3n} m_i (\ddot{x}_i^2 + \dot{x}_i \dddot{x}_i) \tag{32}$$

zu bilden. Damit folgt

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - F_i)\, \delta_G \ddot{x}_i = \delta_G \left(\frac{d^2T}{dt^2} - \sum_{i=1}^{3n} F_i \ddot{x}_i \right) - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta_G \ddot{x}_i. \tag{33}$$

Integriert man über das Zeitintervall $[t_a, t_b]$ und wählt $\delta_G \ddot{x}_i(t_a) = \delta_G \ddot{x}_i(t_b) = 0$, $i = 1,..,3n$, so ergibt sich wegen des Gaußschen Prinzips für Gleichheitsbedingungen

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta_G \left(\frac{d^2T}{dt^2} - \sum_{i=1}^{3n} F_i \ddot{x}_i \right) dt = 0. \tag{34}$$

Dieses Integral kann als erste Gaußsche Variation des Funktionals (29) interpretiert werden, wenn dort

$$f = \sum_{i=1}^{3n} \left[m_i (\ddot{x}_i^2 + \dot{x}_i \dddot{x}_i) - F_i(x, \dot{x}, t)\, \ddot{x}_i \right] \tag{35}$$

eingesetzt wird. Existieren keine Nebenbedingungen, so ergeben sich aus (31) mit (35) die Newtonschen Bewegungsgleichungen. Wenn Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind, hat man die in (35) angegebene Funktion f zunächst in generalisierten Koordinaten darzustellen und dann die Gaußsche Variation in (34) auszuführen.

Zusammenfassend kann man sagen:

Die Anwendung des Gaußschen Prinzips auf mechanische Systeme mit Nebenbedingungen erfordert, daß zweite zeitliche Ableitungen explizit auftreten. Für viele Probleme wird diese Darstellung unbequem sein, vor allem bei der Umrechnung des Zwanges auf generalisierte Koordinaten. Andererseits gibt es mechanische Probleme, bei denen die Verwendung dieses Prinzips zweckmäßig und manchmal sogar notwendig ist. Für das vor etwa 150 Jahren formulierte Gaußsche Prinzip sind die Anwendungsmöglichkeiten sicher noch nicht erschöpft.

Literatur:

Baumgarte, J.: 1972, Comput. Methods Appl. Mech. a. Eng. *1*, 1.
Gauß, C. F.: 1829, J. reine u. angew. Math. *4*, 232; Werke V, 25.
Gibbs, J. W.: 1879, Am. J. Math. *2*, 49.
Hölder, O.: 1896, Nachr. Königl. Ges. Göttingen. Kl. Math.-Phys. 122.
Ritter, A.: 1853, Dissertation Göttingen; teilweise abgedruckt in C. F. Gauß Werke X 1, 469.
Schenkl, E.: 1913, Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Abt. II a, *122*, 721.
Stäckel, P.: 1919, Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Abt. A. Abhdlg. 11.
Voss, A.: 1900, Nachr. Königl. Ges. Göttingen. Kl. Math.-Phys. 322.